INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
18 martie 2017

Clasa a IX-a

1. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere naturale care verifică relația $x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 + x_{n-3}^2$, $\forall n \geq 3$.

Arătați că dacă există un termen $x_p = 2017$, atunci $p \leq 3$.

2. Fie triunghiul ABC și $f : [BC] \longrightarrow (0, \infty)$ definită prin $f(M) = d(A, M)$.

a) Pentru ce triunghi propoziția:
$(\forall M_1)(\forall M_2)\big[(M_1 \neq M_2) \longrightarrow \big(f(M_1) \neq f(M_2)\big)\big]$, unde $M_1, M_2 \in [BC]$,
este adevărată?

b) Determinați mulțimea valorilor funcției f.

3. Fie $a, b, c \in [0, \infty)$, astfel încât $a + b + c = 3$.

a) Arătați că: $(1 - a)(1 - b)(1 - c) + 2 \geq 2abc$.

b) Determinați valoarea maximă a expresiei :
$E(a, b, c) = 2(a^3 + b^3 + c^3) + 15(ab + bc + ca) + 6abc$.

4. Se dă triunghiul ABC, DE//BC, $D \in (AB), E \in (AC)$ și fie $\{T\} = BE \cap CD$. Arătați că există $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât $\overrightarrow{AT} = \alpha\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluții clasa a IX-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1. Presupunem că există $p>3$ astfel încât $x_p=2017$. Dar $x_p=x_{p-1}^2+x_{p-2}^2+x_{p-3}^2$.
Notăm $x_{p-1}=a$ și $x_{p-2}=b$, $x_{p-3}=c$ și $x_{p-4}=d$, unde $a,b,c,d\in\mathbf{N}$. **(2p)**

Atunci $2017=a^2+b^2+c^2\Rightarrow a^2\le 2017\Rightarrow a\le\sqrt{2017}, 44<\sqrt{2017}<45$.
Dar $a\in\mathbf{N}\Rightarrow a\le 44$ (*). **(2p)**

Atunci $b^2+c^2\ge 2017-44^2\Rightarrow b^2+c^2\ge 81$. Dar $a=b^2+c^2+d^2\ge 81\Rightarrow a\ge 81$(**). **(2p)**

Din (*), (**), se obține o contradicție. Deci, presupunerea făcută este falsă!
În concluzie dacă există un termen $x_p=2017$, atunci $p\le 3$. **(1p)**

2. a) Dacă $m(\hat{B})<90^0$ și $m(\hat{C})<90^0$, atunci propoziția este falsă deoarece dacă $AA_1\perp BC, A_1\in BC$, atunci $A_1\in(BC)$ și este suficient să alegem
$M_1\in(A_1B),\ M_2\in(A_1C)$, astfel încât $M_1A_1=\ M_2A_1$. Rezultă:
$d(A,M_1)=d(A,M_2),\ M_1\neq M_2$, deci propoziția:
$(\forall M_1)(\forall M_2)\big[(M_1\neq M_2)\longrightarrow\big(f(M_1)\neq f(M_2)\big)\big]$, unde $M_1,M_2\in[BC]$, este falsă. **(2p)**
Dacă $m(\hat{B})\ge 90^0$ sau $m(\hat{C})\ge 90^0$, atunci propoziția:
$(\forall M_1)(\forall M_2)\big[(M_1\neq M_2)\longrightarrow\big(f(M_1)\neq f(M_2)\big)\big]$, unde $M_1,M_2\in[BC]$, este adevărată.
Să presupunem că $m(\hat{B})\ge 90^0$ (celălalt caz se tratează similar). Atunci, dacă
$M_1\in[BM_2)$ avem $M_1<BM_2\Longrightarrow\ AM_1<AM_2\ \Longrightarrow f(M_1)<f(M_2)$, adică propoziția:
$(\forall M_1)(\forall M_2)\big[(M_1\neq M_2)\longrightarrow\big(f(M_1)\neq f(M_2)\big)\big]$, unde $M_1,M_2\in[BC]$,
este adevărată. Propoziția din enunț este adevărată pentru un triunghi ABC dreptunghic sau obtuz, cu $m(\hat{B})\ge 90^0$ sau $m(\hat{C})\ge 90^0$. **(3p)**

b) Avem $\min\limits_{M\in[BC]} f(M)=d(A,BC)=\alpha$ și $\max\limits_{M\in[BC]} f(M)=\max\{AB,AC\}=\beta$. Atunci
$\operatorname{Im} f=[\alpha,\beta]$. **(2p)**

3. a) Avem: $(1-a)(1-b)(1-c)=-2+ab+bc+ca-abc.$ **(1p)**

Dar $(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc$, de unde rezultă $ab+bc+ca\ge 3abc$
și deci:$(1-a)(1-b)(1-c)\ge 2abc-2$(avem egalitate dacă $a=b=c=1$). **(1p)**

b) Cum $x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,
pentru orice $x,y,z\in\mathbf{R}$, iar $a+b+c=3$, obținem (ținând cont și de punctul a)):

$(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3=3(a-1)(b-1)(c-1)\le 6-6abc.$ **(2p)**

Deci : $\sum a^3-3\sum a^2+6\le 6-6abc$. Deoarece $\sum a^2=9-2\sum ab$, obținem că:
$a^3+b^3+c^3+6(ab+bc+ca+abc)\le 27.$ (1)
Cum $\sum a^3=3abc+3(9-3\sum ab)\le 30-9\sum ab$, deducem că
$a^3+b^3+c^3+9(ab+bc+ca)\le 30$. (2) (am ținut cont că $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=1$) **(2p)**

Adunând relațiile (1) și (2) se obține că $E(a,b,c) \leq 57$ cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c = 1$. Așadar $\max_{a,b,c\geq 0} E(a,b,c) = 57$ care se realizează pentru $a = b = c = 1$. **(1p)**

4. Notăm $AT \cap BC = \{F\}$.

Folosind teorema lui Thales $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$. **(2p)**

Folosind teorema lui Ceva obținem că F este mijlocul laturii (BC). **(2p)**

Rezultă că $\overrightarrow{AT} = \frac{AT}{AF} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{AT}{2AF} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. **(2p)**

Luăm $\alpha = \frac{AT}{2AF} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ **(1p)**