INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
18 martie 2017

Clasa a X-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale :
a) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$; b) $\sqrt{x+10} \geq 2-x$.

2. a) Rezolvați ecuația:
$$(2^x-1)^2 = \log_2\left(\sqrt{x}+1\right).$$

b) Determinați numerele reale x, y astfel încât:
$$\begin{cases} 2^{x^2}+2^{\frac{1}{y^2}}=2^{y+\frac{1}{x}} \\ 2^{y^2}+2^{\frac{1}{x^2}}=2^{x+\frac{1}{y}} \end{cases}.$$

3. Fie $A=\{x_1, x_2, \dots, x_{2015}\}, x_i \in \mathbb{Z}, i=\overline{1,2015}$ și $f: A \to A$, astfel încât $f^\circ f^\circ f=\mathbf{1}_A$. Arătați că există $(3k+2)$ valori, $k=\overline{0,671}$, pentru care $|f(x_k)-x_k|<1$.

4. Determinați numerele complexe z_1, z_2, z_3 având părțile reale numere cel mult egale cu zero, știind că există $a, b, c \in (0, \infty)$, astfel încât:
$$|a-z_1|^2+|b-z_2|^2+|c-z_3|^2 \leq 2(a|z_1|+b|z_2|+c|z_3|).$$

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii clasa a X-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1. a) Notăm $\sqrt[3]{2-x}=a$ și $\sqrt{x-1}=b$, unde $x\geq 1$, $b\geq 0$. De aici rezultă că trebuie rezolvat sistemul de ecuații: $\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^2=1 \end{cases}$. Din prima ecuație avem $b=1-a$, care introdusă în a doua ecuație conduce la: $a^3+a^2-2a=0 <=> a(a^2+a-2)=0 <=>$ $a\in\{-2,0,1\}$. Obținem imediat că $x\in\{1,2,10\}$. **(3p)**

b) Pentru $2-x\leq 0$ și $x+10\geq 0$, adică $x\in[2,\infty)$ inecuația dată este satisfăcută. **(1p)**

Pentru $2-x>0$ și $x+10>0$, adică $x\in(-10,2)$ ridicăm ambii membri ai inecuației la pătrat și avem $x+10\geq x^2-4x+4 <=> x^2-5x-6\leq 0 <=> x\in[-1,6]\cap(-10,2)=[-1,2)$.

Așadar soluția inecuației propuse în enunț este $x\in[2,\infty)\cup[-1,2)=[-1,\infty)$. **(3p)**

2. a) Fie $y=\log_2(\sqrt{x}+1)$, $x,y>0$. Atunci $2^y-1=\sqrt{x}$ și $2^x-1=\sqrt{y}$, deci

$2^x+\sqrt{x}=2^y+\sqrt{y}$.

(1p)

Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+\sqrt{x}$ este strict crescătoare, deci $x=y$, adică

$2^x-1=\sqrt{x}$. Se observă că 0 și 1 sunt soluții ale ecuației.

(1p)

Cum $g(x)=2^x-1$ este strict convexă și $h(x)=\sqrt{x}$ este strict concavă, acestea sunt singurele soluții.

(1p)

b) Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$$2^{y+\frac{1}{x}}=2^{x^2}+2^{\frac{1}{y^2}}\geq 2\sqrt{2^{x^2}\cdot 2^{\frac{1}{y^2}}}=2^{1+\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)};$$

$$2^{x+\frac{1}{y}}=2^{y^2}+2^{\frac{1}{x^2}}\geq 2\sqrt{2^{y^2}\cdot 2^{\frac{1}{x^2}}}=2^{1+\frac{1}{2}\cdot\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)},$$

deci: $y+\frac{1}{x}\geq 1+\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)$, $x+\frac{1}{y}\geq 1+\frac{1}{2}\cdot\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$.

(2p)

Adunând, obținem: $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\geq 2+\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}\right)\Leftrightarrow$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}-2x-\frac{2}{x}-2y-\frac{2}{y}+4\leq 0\Leftrightarrow$$

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}+\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}-\mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}+\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}-\mathbf{1}\right)^{\mathbf{2}}\leq\mathbf{0}\Leftrightarrow x=y=1.$$

(2p)

3. Deoarece funcția identică $\mathbf{1}_A$ este bijectivă, iar $f\circ f\circ f=\mathbf{1}_A$, deducem că f este bijectivă. Din $|f(x_k)-x_k|<1$ și $f(x_k)-x_k\in\mathbb{Z}\Rightarrow f(x_k)=x_k$, adică va trebui să arătăm că f are $(3k+2)$, $k=\overline{0,671}$, puncte fixe. **(1p)**

Presupunem prin absurd că f nu are puncte fixe, adică:

$\forall\ i = \overline{1,2015}, f(x_i) \neq x_i$. Rezultă că pentru orice $x_i \in A, i = \overline{1,2015}$, elementele $[x_i, f(x_i), f(f(x_i))]$ sunt distincte două câte două:

1. $f(x_i) \neq x_i,\ \forall\ x_i \in A$;
2. $f(f(x_i)) \neq\ f(x_i), \forall\ x_i \in A$;

(Dacă $f(f(x_i)) =\ f(x_i)$ și cum f injectivă deducem $f(x_i) = x_i$, contradicție cu $f(x_i) \neq x_i$, $\forall\ x_i \in A$);

3. $f(f(x_i)) \neq\ x_i, \forall\ x_i \in A$;

(Dacă $f(f(x_i)) = x_i |{\circ}f\ \Rightarrow f\left(f(f(x_i))\right) = f(x_i)$, dar din ipoteză $f\left(f(f(x_i))\right) = x_i$, deci $f(x_i) = x_i$, contradicție cu $f(x_i) \neq x_i,\ \forall\ x_i \in A$). **(3p)**

Din injectivitatea funcției f deducem că mulțimile $A_x = \{x, f(x), f(f(x))\}$ și $A_y = \{y, f(y), f(f(y))\}$ sunt disjuncte pentru $x \neq y, x, y \in A$. **(1p)**

În concluzie $Im\ f = A = \bigcup_{x\in A} A_x$, iar $card\ A \vdots 3 \Leftrightarrow 3|2015$, contradicție. Rezultă că f admite puncte fixe. Dacă f are un singur punct fix, atunci $card\ A = 3k + 1$, fals deoarece $card\ A = 2015 \in 3\mathbb{Z} + 2$. În concluzie f are cel puțin două puncte fixe. Din construcția mulțimilor $A_x, x \in A, card\ A = 3$, deducem că f are $(3k + 2), k = \overline{0,671}$ puncte fixe. **(2p)**

4. Avem: $|a - z_1|^2 = (a - z_1)(a - \overline{z_1}) = a^2 - 2a\mathrm{Re}(z_1) + |z_1|^2$, (1), unde am ținut cont că $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ și $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, pentru orice $z \in$ **C**. **(2p)**

Ținând cont că $a \cdot \mathrm{Re}(z_1) \leq 0$ și $a^2 + |z_1|^2 \geq 2a|z_1|$, din egalitatea (1) obținem $|a - z_1|^2 \geq 2a|z_1|$, (2) cu egalitate dacă și numai dacă $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ și $|z_1| = a,$ adică$z_1 = ai$. **(2p)**

Se scriu și celelalte două relații analoage cu (2) și prin însumare se obține inegalitatea : $|a - z_1|^2 + |b - z_2|^2 + |c - z_3|^2 \geq 2(a|z_1| + b|z_2| + c|z_3|)$, (3) . **(2p)**

Dacă ținem cont de inegalitatea din enunț , obținem că în (3) trebuie să avem egalitate și atunci rezultă $z_1 = ai, z_2 = bi$ și $z_3 = ci$. **(1p)**