CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
18 martie 2017

Clasa a XI-a

1. a) Să se arate că ecuaţia $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ nu are soluţii în $M_2(\mathbb{C})$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), n \geq 2,$ fixat, astfel încât $(A-B)^2 = O_n$ și $AB = BA$. Dacă $a \in \mathbf{R}$ cu $|a| < 2$, demonstrați că: $\det(I_n - a(A+B) + a^2 AB) \geq 0$.

3. Arătați că dacă $a, b \in \mathbf{R}$ și $\left|2^x + 3^{\sin x} + ax + b\right| \leq |x^3|, (\forall) x \in (-1,1)$, atunci $a = -\ln 6$.

4. Fie $f: I \to \mathbb{R}$, I interval, o funcție continuă, neconstantă și $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ două puncte consecutive de extrem local. Demonstrați că unul dintre acestea este punct de minim și celălalt este punct de maxim.

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii clasa a XI-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1. a) Presupunem că ecuația are soluții, deci există X astfel încât $X^2 = A$. Prin ridicare la pătrat obținem $X^4 = A^2$, dar $A^2 = O_2$, deci $X^4 = O_2$ **(2p)**

$X^4 = O_2 \Rightarrow \det(X) = 0 \Rightarrow X^2 = tX\ (t = Tr(X)) \Rightarrow X^4 = t^3 X = O_2$, iar de aici avem

$t = 0 \Rightarrow X^2 = O_2$ sau $X = O_2$, **(1p)**

deci în ambele cazuri $X^2 = O_2$ în contradicție cu $X^2 = A$. **(1p)**

b) Avem $Tr(A) = 3, \det(A) = -4$. Avem ecuația valorilor proprii $x^2 - 3x - 4 = 0$ cu rădăcinile: 1,4, deci există matricele B,C astfel încât $A^n = (-1)^n B + 4^n C, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru n=1,2 obținem sistemul: $\begin{cases} -B + 4C = A \\ B + 16C = A^2 \end{cases}$, cu soluția $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, iar de aici obținem ce se cerea **(3p)**

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6\cdot 4^n - (-1)^n & 3\cdot 4^n - 3(-1)^n \\ -2\cdot 4^n + 2(-1)^n & -4^n + 6(-1)^n \end{pmatrix}.$$

2. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, rădăcinile ecuației $x^2 + ax + 1 = 0$, unde $a \in \mathbf{R}$ cu $|a| < 2$.

Considerăm matricea $X = I_n + x_1 A + x_2 B$ și cum $\overline{x_1} = x_2$, avem: **(2p)**

$X \cdot \overline{X} = (I_n + x_1 A + x_2 B)(I_n + x_2 A + x_1 B) =$

$= I_n + (x_1 + x_2)(A + B) + x_1 x_2 (A^2 + B^2) + (x_1^2 + x_2^2)AB =$

$= I_n - a(A + B) + (A^2 + B^2) + (a^2 - 2)AB$. **(3p)**

Cum $(A - B)^2 = O_2$, obținem $X \cdot \overline{X} = I_n - a(A + B) + a^2 AB$ și dacă ținem cont că

$\det(X \cdot \overline{X}) \geq 0$, deducem că: $\det(I_n - a(A + B) + a^2 AB) \geq 0$. **(2p)**

3. Pentru $x = 0$ inegalitatea dată devine $|b + 2| \leq 0$, de unde rezultă imediat că $b = -2$. **(2p)**

Înlocuind valoarea obținută pentru b și împărțind cu $x \neq 0$, relația data în enunț devine $\left|\frac{2^x + 3^{\sin x} - 2}{x} + a\right| \leq x^2, (\forall)\, x \in (-1,1),\ x \neq 0, (1)$. **(2p)**

Avem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x + 3^{\sin x} - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^{\sin x} - 1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \ln 2 + (\ln 3)\cdot 1 = \ln 6$. (2) **(2p)**

Ținând cont de (2), se trece la limită cu $x \to 0$ în relația (1) și rezultă $a = -\ln 6$. **(1p)**

4. Fie $x_1 < x_2$ și $a, b \in [x_1, x_2]$ cu $a < b$. Cum f nu are puncte de extrem în (a, b), rezultă că a și b sunt puncte de extrem global (de minim și maxim) ale restricției $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. **(2p)**

Dacă $f(a) = f(b)$ atunci f este constantă pe $[a, b]$ și orice punct din (a, b) este punct de extrem, fals. **(1p)**

Deci $f(a) \neq f(b)$ și din injectivitatea lui f pe $[x_1, x_2]$ deducem că f este strict monotonă pe $[x_1, x_2]$. **(2p)**

Presupunem că f strict crescătoare pe $[x_1, x_2]$. Cum x_1, x_2 sunt puncte de extrem ale lui f, rezultă că x_1 este punct de minim și x_2 punct de maxim. **(2p)**