INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN
DOLJ

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
18 martie 2017

Clasa a XII-a

1. Pe mulímea $G = \mathbb{R}^{*}$x $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție " ∘ " prin:
$(a,b) \circ (c,d) = (ac, bc + d)$.

a) Demonstrați că $(G,\circ)$ este grup necomutativ.
b) Arătați că în G există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în G elemente de ordinul 3?

2. Fie A un inel cu proprietatea: $(ab)^2 = a^2b^2, \forall a, b \in A$. Să se arate că A este comutativ.

3. a) Arătați că: $\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{2-x} = \operatorname{arctg}\frac{1+2x-2x^2}{2}$, $(\forall) x \in [0,1]$.

b) Calculați: $= \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}}{\operatorname{arctg}\frac{1+2x-2x^2}{2}} \mathrm{d}x$.

4. Fie $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, o funcție continuă și concavă pe $[0,1]$, iar $m \in \mathbb{R}, m \geq 2$.
Să se arate că:

$$\int_{\frac{1}{m}}^{1} f(x)dx \geq \frac{m-1}{m^2} \cdot f(1) + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \cdot \int_0^1 f(x)dx.$$

Notă:
- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 3 ore.*

Soluţii clasa a XII-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1. a) Se verifică imediat că " $\circ$ " este lege de compoziție pe G, că este asociativă și că perechea $(1,0)$ este element neutru. Orice element este inversabil cu $(a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$. Așadar $(G,\circ)$ este grup. **(4p)**

Legea este necomutativă: $(1,2)\circ(3,4) = (3,\ 10) \neq (3,4)\circ(1,2)$. **(1p)**

b) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, perechea $(-1,a)$ este un element de ordin 2. **(1p)**
Dacă $(a,b) \in G$ este un element de ordin 3, atunci:
$(1,0) = (a,b)^3 = \left(a^3, b(a^2+a+1)\right) \Longrightarrow a = 1, b = 0$. Dar $(1,0)$ este element neutru și are ordinul 1, astfel că G nu conține elemente de ordinul 3. **(1p)**

2. Înlocuind b cu $b+1$, obținem:

$$\left(a(b+1)\right)^2 = a^2(b+1)^2 \Longrightarrow (ab+a)^2 = a^2(b^2+2b+1) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (ab)^2 + aba + a^2b + a^2 = a^2b^2 + 2a^2b + a^2.$$

Folosind ipoteza, rezultă $aba = a^2b, \forall a,b \in A$ $(*)$. **(3p)**
În relația (*) înlocuim a cu $a+1$:

$$(a+1)b(a+1) = (a+1)^2b \Longrightarrow (ab+b)(a+1) = (a^2+2a+1)b \Longrightarrow$$
$\Longrightarrow aba + ab + ba + b = a^2b + 2ab + b.$ (**) **(3p)**

Din (*), (**) obținem $ab = ba$. **(1p)**

3. a) Demonstrarea identității. **(2p)**
b) Se face schimbarea de variabilă $x = 1-t$ $(dx = -dt, x = 0 => t = 1$ și$x = 1 => t = 0)$ și obținem $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\frac{1-t}{2-t}}{\operatorname{arctg}\frac{1+2t-2t^2}{2}}\mathrm{d}t$. **(2p)**

Atunci, ținând cont de relația de la punctul a), obținem :

$2I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}}{\operatorname{arctg}\frac{1+2x-2x^2}{2}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\frac{1-x}{2-x}}{\operatorname{arctg}\frac{1+2x-2x^2}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1 <=> I = \frac{1}{2}$. **(3p)**

4. Deoarece funcția f este continuă atunci este integrabilă pe $[0,1]$, deci este integrabilă și pe $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$. Pentru fiecare $n \geq 1$, formăm diviziunea echidistantă Δ_n a intervalului $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$ de forma:

$\Delta_n = \left(x_0 = \frac{1}{m} < x_1 = \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m\cdot n} < \ldots < x_k = \frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n} < \ldots < x_n = \frac{1}{m} + \frac{n\cdot(m-1)}{m\cdot n} = 1\right)$, de normă $\|\Delta_n\| = \frac{m-1}{m\cdot n}$, iar în fiecare interval $[x_{k-1},\ x_k]$ se alege punctul intermediar de forma: $\xi_k = \frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n}$. Suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ_n și punctelor intermediare ξ_k este:

$$\sigma(\Delta_n, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = \frac{m-1}{m\cdot n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi) = \int_{\frac{1}{m}}^{1} f(x)dx.$$

(2p)

Funcția f este concavă, deci:

$$f\left(\frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n}\right) = f\left(\frac{1}{m}\cdot 1 + \frac{m-1}{m}\cdot\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{m}\cdot f(1) + \frac{m-1}{m}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n}\right) \geq \frac{n}{m}\cdot f(1) + \frac{m-1}{m}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) (*);$$

(2p)

Relația (*) o înmulțim cu $\frac{m-1}{m\cdot n}$:

$$\frac{m-1}{m\cdot n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n}\right) \geq \frac{m-1}{m^2}\cdot f(1) + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)(**).$$

(1p)

Se trece la limită în relația (**):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m-1}{m\cdot n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n}\right)\right) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m-1}{m^2}\cdot f(1) + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m-1}{m\cdot n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{m} + \frac{k\cdot(m-1)}{m\cdot n}\right)\right) \geq \frac{m-1}{m^2}\cdot f(1) + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{m}}^{1} f(x)dx \geq \frac{m-1}{m^2}\cdot f(1) + \left(\frac{m-1}{m}\right)^2\cdot\int_{0}^{1} f(x)dx.$$

(2p)