



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și
protecția mediului
XI. osztály

1. feladat

Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix.

- Oldd meg a $\det(I_3 + xA) = 0$ egyenletet, amelyben $x \in \mathbb{R}$ az ismeretlen!
- Igazold, hogy $A^2 = A + 2I_3$.
- Igazold, hogy a $B = 2A + I_3$ mátrix invertálható és inverze a $C = \frac{2}{5}A - \frac{3}{5}I_3$ mátrix!
- A $B = 2A + I_3$ mátrixot 2017 lépésben átalakítjuk a következőképpen: minden lépésben –véletlenszerűen– a főátló összes elemét vagy megnöveljük, vagy lecsökkentjük 1-gyel, a mátrix összes többi elemét pedig vagy megnöveljük, vagy lecsökkentjük 3-mal. Lehetséges-e, hogy a 2017 lépésből álló átalakítás után egy olyan mátrixot kapjunk, amelynek determinánsa pontosan 2017 legyen?

2. feladat

Adottak az $A = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixok és a $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) / A \cdot X = X \cdot A\}$ halmaz.

- Igazold, hogy $B \in G$.
- Ha $X \in G$ igazold, hogy léteznek az $x, y \in \mathbb{R}$ számok úgy, hogy $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$.
- Az $X \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix teljesíti az $X^3 - X = A$ egyenlőséget. Igazold, hogy $X \in G$ és határozd meg az összes ilyen tulajdonságú X mátrixot!

3. feladat

- Adottak az a, b, c szigorúan pozitív valós számok és az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1}$ függvény.

Határozd meg az a, b, c számokat, ha $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 4$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$.

- Határozd meg $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x + 1}$ függvény grafikus képéhez húzható aszimptoták egyenleteit!

4. feladat

Az $f: [0; 12] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \frac{3t^2 - 10t + a}{t^2 - 2t - 3}, & t \in [0; 3) \\ b - \log_2(t - 2), & t \in [3; 12] \end{cases}$ függvény egy test hőmérsékletét írja le, amelyet 12 órán

keresztül mérnek.

- Ha a $t=1$ időpillanatban a test hőmérséklete 1^0 és a $t=2$ időpillanatban 2^0 , határozd meg a test hőmérsékletét a $t=10$ időpillanatban!
- Határozd meg az $a, b \in \mathbb{R}$ számokat, ha az f függvénynek van határértéke a $t=3$ pontban!
- Ha $a=3$ és $b=2$ igazold, hogy az f függvény folytonos a $[0; 12]$ intervallumon és határozd meg azokat az intervallumokat, amelyekre teljesül az $f(t) > 0$ egyenlőtlenség!