



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

XII. osztály

1. feladat

Az egész számok \mathbb{Z} halmazán értelmezzük a "o" műveletet, $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ esetén.

- Igaz-e, hogy $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ esetén?
- Igazold, hogy a "o" művelet kommutatív és asszociatív!
- Van-e semleges eleme a $(\mathbb{Z}; \circ)$ struktúrának?
- Ha $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{4034}$ a 2^{2017} szám egész osztói, számítsd ki a $d_1 \circ d_2 \circ d_3 \dots \circ d_{4034}$ értéket!

2. feladat

A Popescu család 24 órán keresztül mért villamosenergia fogyasztását egy $K: [0; 24] \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény írja le. Ez a függvény deriválható, $K(0) = 0$, $K'(t) = (t+1)e^{-t}$, $(\forall) t \in [0; 24]$ esetén és $K(t)$ a villamosenergia fogyasztást jelenti a $[0; t]$ időintervallumban, Kw/h -ban kifejezve.

- Igazold, hogy az $F(t) = -(t+1) \cdot e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$ függvény az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t \cdot e^{-t}$ függvény egy primitívje!
- Igazold, hogy $K(t) = 2e - (t+2) \cdot e^{-t}$, $(\forall) t \in [0; 24]$ esetén!
- Igazold, hogy az első órában a Popescu család kevesebb, mint $2,5 Kw/h$ villamosenergiát fogyaszt!
- Egy egész napon át tekintve a $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, ..., $[23; 24]$ időintervallumokat, igazold, hogy a család legnagyobb villamosenergia fogyasztása a $[0; 1]$ időintervallumban lesz!

3. feladat

Adott a $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$ halmaz.

- Határozd meg a G halmaz elemeinek számát!
- Igazold, hogy a $(G; +)$ struktúra Ábel-féle csoport!
- Számítsd ki a G halmaz elemeinek összegét!

4. feladat

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ függvény.

- Igazold, hogy $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{13}{3}$.
- Számítsd ki az $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x \cdot f(x)}$ integrál értékét!
- Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^3 f(t) dt$ határértéket!

Megjegyzések: Munkaidő 4 óra; minden feladat kötelező; minden feladat 7 pontot ér.