CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

IX. osztály

1. feladat

Egy számítógépes játék szabályai a következők: a játékos minden fordulóban választ egy $a \in \mathbb{N}^*$ számot, utána a számítógép véletlenszerűen választ egy $x \in \mathbb{R}$ számot, és ha $\frac{15-3x}{7} \geq a$ vagy $x+25 \geq a$, akkor a játékos nyer a darab pontot.

a) Ha $a=12$ és $x=-24$ igaz-e, hogy a játékos 12 pontot nyer?
b) Igazold, hogy $a=12$ esetén megtörténhet, hogy a játékos nem nyer 12 pontot!
c) Igazold, hogy választhatók olyan $a \in \mathbb{N}$ számok, amelyekre a számítógép által választott bármely $x \in \mathbb{R}$ szám esetén a játékos nyer a darab pontot, és határozd meg egy fordulóban a játékos által nyerhető pontok maximális számát!

2. feladat

a) Igazold, hogy $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}$, bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ természetes szám esetén!
b) Határozd meg az x és y nullától különböző természetes számot, amelyekre $\frac{1}{x\cdot y}=1-\frac{1}{y}$.
c) Határozd meg az $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ függvényt, amely bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén teljesíti az

$$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}+\frac{1}{f(3)\cdot f(4)}+...+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}=1-\frac{1}{f(n)}$$ egyenlőséget!

3. feladat

Adott az ABC háromszög valamint az M, N és P pontok úgy, hogy $\overrightarrow{BN}=3\cdot\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}=3\cdot\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{PC}$.

a) Igazold, hogy $MN \parallel BC$.
b) Ha $BM \cap CN=\{Q\}$, igazold, hogy az A pont a QBC háromszög súlypontja és $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{O}$.
c) Igazold, hogy a QBC és MNP háromszögek súlypontjai egybeesnek!

4. feladat

Adott az $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=x^2+2(m-1)x+(1-4m)$ másodfokú függvénycsalád, ahol $m \in \mathbb{R}$ és ezekhez a függvényekhez tartozó parabolacsalád.

a) Igazold, hogy létezik olyan $m \in \mathbb{R}$, amelyre az $A(-1;\,3)$ pont az f_m függvényhez tartozó parabolán van!
b) Igazold, hogy létezik egy pont, amely rajta van a család minden paraboláján!
c) Feltéve, hogy ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a család összes paraboláját, bizonyítsd be, hogy léteznek olyan pontok, amelyek egyetlen parabolán sincsenek rajta, és bármely három ilyen pont kollineáris!

<u>Megjegyzések</u>: *Munkaidő 4 óra; minden feladat kötelező; minden feladat 7 pontot ér.*