



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

X. osztály

1. feladat

Egy $\frac{1}{2\pi}$ méter sugarú körön két csiga mászik, legyenek A és B , amelyek egyidőben és ugyanabból a helyből indulnak két különböző irányba. Az indulástól számítva minden n -edik másodpercben az A csiga $\frac{1}{2^n}$ métert halad, a B csiga pedig csak $\frac{1}{4^n}$ métert halad.

- Igazold, hogy az első n másodperc alatt az A csiga $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ méter távolságot tesz meg!
- Határozd meg, hogy a B csiga által megtett távolság hány másodperc múlva lesz $\frac{3}{8}$ -ad része az A csiga által megtett távolságnak!
- Határozd meg, hogy hányszor fog találkozni a két csiga, ha minden találkozás után mindkettő folytatja útját a megadott szabályok szerint!

2. feladat

- Igazold, hogy $4 < 4 \log_4 10 < 5$.
- Számítsd ki $[\log_3 256]$ értékét, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli.
- Hasonlítsd össze az $a = \log_7 10$ és $b = \log_3 4$ számokat!

3. feladat

Legyen $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, ahol $i^2 = -1$.

- Igazold, hogy $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ és $\varepsilon^3 = 1$.
- Igazold, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x^2 + xy + y^2 = |x - \varepsilon y|^2$.
- Ha $x, y, z \in \mathbb{R}$ és $a = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, valamint $b = xy^2 + yz^2 + zx^2$, számítsd ki az a és b függvényében az $E = (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3)$ kifejezést!

4. feladat

Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 3^x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ függvény.

- Igazold, hogy $\log_3 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Igazold, hogy $f(\log_3 2) \in \mathbb{Q}$.
- Igazold, hogy az $f(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$ egyenletnek nincs megoldása!
- Igazold, hogy az f függvény se nem injektív, se nem szürjektív!

Megjegyzések: Munkaidő 4 óra; minden feladat kötelező; minden feladat 7 pontot ér.