

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘICONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

Problema 1.

Pe un cerc cu raza de $\frac{1}{2\pi}$ metri se deplasează doi melci, notați A și B , plecând în același moment, din același loc și în sensuri diferite. Se știe că în fiecare a n -a secundă de la începutul deplasării lor, melcul A parcurge $\frac{1}{2^n}$ metri în timp ce melcul B parcurge doar $\frac{1}{4^n}$ metri.

- Arătați că distanța parcursă de melcul A în primele n secunde este egală cu $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ metri.
- Determinați după câte secunde distanța parcursă de melcul B este egală cu $\frac{3}{8}$ din distanța parcursă de melcul A .
- Aflați de câte ori se întâlnesc cei doi melci, considerând că după fiecare întâlnire ei își continuă deplasarea după aceleași reguli.

Problema 2.

- Demonstrați că $4 < 4 \log_4 10 < 5$.
- Calculați $[\log_3 256]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .
- Comparați numerele $a = \log_7 10$ și $b = \log_3 4$.

Problema 3.

Considerăm $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, cu $i^2 = -1$.

- Arătați că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$.
- Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc $x^2 + xy + y^2 = |x - \varepsilon y|^2$.
- Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $a = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, respectiv $b = xy^2 + yz^2 + zx^2$, calculați în funcție de a și b expresia $E = (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3)$

Problema 4.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 3^x, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

- Arătați că $\log_3 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Arătați că $f(\log_3 2) \in \mathbb{Q}$.
- Demonstrați că ecuația $f(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$, nu are soluție.
- Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă și nici surjectivă.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.