MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

Filiera Teoretică : profilul Real - Ştiințe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a IX -a

Problema 1.

a) Determinaţi numerele întregi x pentru care fracţia $\dfrac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.

b) Determinaţi numerele raţionale x pentru care fracţia $\dfrac{3x+2}{2x-1}$ este număr întreg.

SOLUŢIE:

a) Impunem condiția $(2x-1)\mid(3x+2)$; atunci $(2x-1)\mid\left[2(3x+2)-3(2x-1)\right]$, deci $(2x-1)\mid 7$. Obţinem că $x\in\{-3,0,1,4\}$ şi toate aceste patru valori sunt convenabile. **4p**

b) Din $\dfrac{3x+2}{2x-1}=m\in\mathbb{Z}$ obţinem că $x=\dfrac{m+2}{2m-3}$, $m\in\mathbb{Z}$. Cum $\dfrac{m+2}{2m-3}\neq\dfrac{1}{2},\forall m\in\mathbb{Z}$, rezultă că numerele raţionale x căutate sunt toate numerele de forma $x=\dfrac{m+2}{2m-3}$, unde $m\in\mathbb{Z}$. **3p**

Problema 2.

Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural nenul n, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}<\frac{5}{6}.$$

SOLUŢIE:

Avem că $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}>(n+1)\cdot\dfrac{1}{2n+1}>\dfrac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$, prin urmare este adevărată inegalitatea din stânga. **3p**

Notăm $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}$. Cum $a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, deducem că $a_n<a_1=\dfrac{5}{6},\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci este adevărată inegalitatea din dreapta. **4p**

Obs. Se poate folosi inducția matematică.

Problema 3.

a) Demonstraţi că suma inverselor lungimilor a două înălţimi ale unui triunghi este mai mare decât inversul lungimii celei de-a treia înălţimi a triunghiului.

b) Un triunghi neisoscel are două înălţimi de lungimi 2 respectiv 5. Determinaţi lungimea celei de-a treia înălţimi, ştiind că este tot un număr natural.

Gazeta Matematică 9/2016 (Supliment)

SOLUŢIE:

a) Folosind notaţiile uzuale în triunghi, avem că $a=\frac{2S}{h_a}, b=\frac{2S}{h_b}$ şi $c=\frac{2S}{h_c}$. **2p**

Din inegalitatea triunghiului, $(a+b>c)$ rezultă $\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}>\frac{2S}{h_c}$, prin urmare $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}$ **2p**

b) Fie $h_a=2, h_b=5$; atunci $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}>\frac{1}{h_c}$ şi $\frac{1}{5}+\frac{1}{h_c}>\frac{1}{2}$. Deducem că $\frac{10}{7}<h_c<\frac{10}{3}$. Cum h_c este număr natural diferit de 2 şi 5 (triunghiul fiind neisoscel), rezultă că $h_c=3$. **3p**

Problema 4.

La ora $14:30$, din Iaşi plecă un tren care ajunge la Bucureşti la ora $22:00$. În aceeaşi zi şi pe acelaşi traseu, la ora $16:00$, din Bucureşti pleacă un tren care ajunge la Iaşi la ora $23:00$. Presupunem că fiecare dintre cele două trenuri parcurge traseul cu viteză constantă.

Stabiliţi, cu eroare de cel mult un minut, care este ora întâlnirii celor două trenuri.

SOLUŢIE:

Notăm cu *d* distanţa Iaşi-Bucureşti, în kilometri. Viteza primului tren este $v_1=\frac{d}{7\frac{1}{2}}=\frac{2d}{15}$ km/h iar viteza celui de-al doilea tren este $v_2=\frac{d}{7}$ km/h. **2p**

Fie *x* ora întâlnirii celor două trenuri. Cum suma distanţelor parcurse de cele două trenuri până în momentul *x* este egală cu distanţa Iaşi-Bucureşti, obţinem că $\left(x-14\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2d}{15}+(x-16)\cdot\frac{d}{7}=d$. **3p**

Ecuaţia obţinută are soluţia $x=\frac{548}{29}\simeq 18,897$. Ora aproximativă a întâlnirii este $18:54$. **2p**