CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

XII. OSZTÁLY

1. Feladat

Két, f_1 illetve f_2 fókusztávolságú lencse $d>0$ távolságra helyezkedik el egymástól. Ebben az esetben a rendszer fókusztávolságát az $f=f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$ művelet adja meg. Ha a művelet a $G=(0;+\infty)$ halmazon értelmezett:

a) Bizonyítsd be, hogy a művelet asszociatív!
b) Tanulmányozd a semleges elem létezését a műveletre nézve!
c) Számítsd ki: $\dfrac{d}{2017}\circ\dfrac{d}{2016}\circ\ldots\circ d\circ(2d)\circ(3d)\circ(4d)\circ\ldots\circ(2017d)$.

2. Feladat

Tekintsük az $f,g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ és $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ függvényeket.

a) Számítsd ki $\int\limits_0^1 f(x)dx$.
b) Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)$ határértéket, ahol G egy olyan primitív függvénye g -nek, amely $x=1$-ben nulla!
c) Bizonyítsd be: $\int\limits_1^{tgx} f(t)dt+\int\limits_1^{ctgx} g(t)dt=0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Feladat

Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ függvényt.

a) Számítsd ki $\int\limits_0^1 xf(x)dx$.
b) Bizonyítsd be, hogy az $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int\limits_0^{x^3} f(t)dt$ függvény szigorúan növekvő a $[0,1]$. intervallumon!
c) Igazold, hogy $\int\limits_0^1 f(x)dx\in(1,2)$.

4. Feladat

Adott a $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ halmaz és bármely $t\in\mathbb{Z}$ esetén legyen $H_t=\{A(kt-1)/k\in\mathbb{Z}\}$. Elfogadjuk, hogy $(G,\cdot)$ egy csoport, ahol " $\cdot$" a mátrixok szorzása.

a) Bizonyítsd be, hogy bármely $n,p\in\mathbb{Z}$ esetén $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.
b) Bizonyítsd be, hogy $\forall t\in\mathbb{Z}$ esetén H_t egy részcsoportja a $(G,\cdot)$ csoportnak.
c) Bizonyítsd be, hogy $(G,\cdot)$ és $(\mathbb{Z},+)$ izomorf csoportok.

Megjegyzés: *Munkaidő 4 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7 -ig pontoznak .*