MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

Clasa a XII -a

Problema 1.

Două lentile având distanţele focale f_1, respectiv f_2 sunt situate la distanţa $d>0$ una faţă de cealaltă; în această situaţie distanţa focală f a sistemului este dată de legea de compoziţie $f=f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$

Considerând legea de compoziţie definită pe $G=(0;+\infty)$, se cere:

a) Să se demonstreze că legea este asociativă.

b) Să se studieze dacă legea admite element neutru.

c) Să se calculeze $\dfrac{d}{2017}\circ\dfrac{d}{2016}\circ\ldots\circ d\circ(2d)\circ(3d)\circ(4d)\circ\ldots\circ(2017d)$.

Problema 2.

Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)$, unde G este primitiva lui g care se anulează în $x=1$.

c) Să se demonstreze : $\int_1^{tgx} f(t)dt+\int_1^{ctgx} g(t)dt=0,\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Să se demonstreze că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^{x^3} f(t)dt$ este strict crescătoare pe $[0,1]$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x)dx\in(1,2)$.

Problema 4.

$G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ şi pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm $H_t=\{A(kt-1)/k\in\mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde " $\cdot$" este înmulţirea matricelor.

a) Să se demonstreze că pentru orice $n, p\in\mathbb{Z},\ A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

b) Să se demonstreze că, pentru $\forall t\in\mathbb{Z},\ H_t$ este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$

c) Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*