MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XI –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{3x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-(1+x)^2}{x}$.

Soluție:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}=\frac{2}{9}$ ……………………………………..……3p

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-(1+x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)(e^x+1+x)}{x}$ ……………………………………………………..…….2p

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}-1\right)(e^x+1+x)=2(\ln e-1)=2\cdot 0=0$ …………………….…………..…….2p

Problema 2.

O echipă de cercetători constată că starea calorică a unei anumite substanțe se modifică în timp după legea: $T(t)=\sqrt{t^2+at+b}-ct+5$, unde $a,b,c\in\mathbf{R}$ sunt constante ce trebuie determinate și în care $T(t)$ este temperatura, măsurată în grade, înregistrată la momentul $t\geq 0$ ce reprezintă numărul de secunde scurs de la începutul experimentului.

a) Determinați $a,b,c\in\mathbf{R}$ știind că $T(1)=7$ și $\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8$.

b) Cu a,b,c astfel determinați, stabiliți dacă este posibil ca la un moment al experimentului temperatura substanței să fie 0°.

Soluție:

a) $T(1)=7\Rightarrow\sqrt{a+b+1}=c+2$ ……………………………………………………..………...……..1p

$\lim\limits_{t\to\infty}T(t)=8\Rightarrow\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+at+b}-ct\right)=3$ ………………….………………….……………..………..1p

Este necesar ca $c>0$ ………………………………..…………………………………………..1p

Obținem: $c=1,\ a=6$ ……………………………...………………………..……..…….……..2p

Din $T(1)=7\Rightarrow b=2$ …………………………………………………………………….……..1p

b) $T(t)=0 \Rightarrow \sqrt{t^2+6t+2}=t-5 \Rightarrow t=\frac{23}{16}$, dar $\frac{23}{16}-5<0$, deci nu este posibil ca temperatura substanței să fie 0° în nici un moment al experimentului ……………………………………………………..1p

Problema 3.

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $A \in M_3(R)$.

a) Demonstrați că $A^2=6A$.

b) Determinați $a \in R$ astfel încât matricea $Y=aA-I_3$ să fie inversa matricei $X=A-I_3$.

c) Demonstrați că $I_3+A+A^2+A^3 \ldots +A^{2017}=\frac{6^{2018}-5\cdot 6^{2017}-1}{5}\cdot A+I_3$.

Soluție:

a) Calcul direct, verifică relația……………………………………………………..…….1p

b) Din $XY=I_3 \Leftrightarrow (A-I_3)(aA-I_3)=I_3 \Leftrightarrow (5a-1)A+I_3=I_3 \Rightarrow a=\frac{1}{5}$ ………………………1p

Deci $Y=\frac{1}{5}A-I_3$ este inversa matricei X. ………………………………………….………..1p

c) Fie $S=I_3+A+A^2+A^3+\cdots+A^{2017}$, avem $S\cdot X=A^{2018}-I_3$ $/\cdot Y$…………………….……….2p

Finalizare

$$S=\left(A^{2018}-I_3\right)\left(\frac{1}{5}A-I_3\right) \Leftrightarrow S=\frac{1}{5}A^{2019}-A^{2018}-\frac{1}{5}A+I_3;$$

$A^{2019}=6^{2018}\cdot A$; $A^{2018}=6^{2017}\cdot A$,

rezultă $S=\frac{6^{2018}-5\cdot 6^{2017}-1}{5}A+I_3$ ………………………………………..………………….2p

Problema 4.

Se dă matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \in M_2(R)$

Demonstrați că

a) $\det\left(A-xI_2\right)>0,\ \forall x \in \mathbf{R}$;

b) $\det(A+I_2)+\det(A-I_2) \in \mathbb{N}$;

c) Ecuația $X\cdot A-A\cdot X=A$ nu are soluții în $M_2(R)$.

Soluție:

a) Prin calcul $\det(A-xI_2)=x^2-\sqrt{3}x+2=$ ……………………………………..……….1p

$$=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{5}{4}>0,\ \forall x \in \mathbf{R}$$ …………………………………………………….……….1p

b) $\det(A-I_2)=3-\sqrt{3}$

$\det(A+I_2)=3+\sqrt{3}$

$\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=6 \in \mathbb{N}$ ……………………………………………………….…..2p

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ astfel încât $X\cdot A-A\cdot X=A$

Relația devine $\begin{pmatrix}-2b-c & a+b\sqrt{3}-d\\ -2d+2a-c\sqrt{3} & c+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ ……….………………………...…..2p

Se obține sistemul $\begin{cases} -2b - c = 0 \\ a + b\sqrt{3} - d = 1 \\ -2d + 2a - c\sqrt{3} = -2 \\ c + 2b = \sqrt{3} \end{cases}$

Din prima și ultima ecuație se obține $0 = \sqrt{3}$, imposibil.

Deci ecuația nu are soluții. ………………………………………………………………..………..…1p