CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

a) Să se determine funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care admite primitive astfel încât $f(1)=1$ şi $\int f(x)dx=-x^2f(x)+C,\ \ C\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze integrala $I(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{e^{-x}+\cos x}dx,\ x<0.$

Soluție:

a) Derivând egalitatea dată , membru cu membru, avem:

$f(x)=-2xf(x)-x^2f'(x)$ ………………………………………………..1p

Obținem $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1+2x}{x^2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x^2}-2\frac{1}{x}$ ………………………………1p

Integrând ultima egalitate, avem $lnf(x)=\frac{1}{x}-2lnx+c$,

Rezultă $f(x)=e^{\frac{1}{x}-2lnx+c}$ ……………………………………………………1p

$f(1)=1\Rightarrow c=-1$, deci $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1-x}{x}}$, $x\in(0,\infty)$……………………………….1p

b) $I=\int\frac{e^{-x}+cosx-e^{-x}-sinx}{e^{-x}+cosx}dx=\int\left(1-\frac{e^{-x}+sinx}{e^{-x}+cosx}\right)dx$ ………………………………1p

$=\int dx+\int\frac{(e^{-x}+cosx)'}{e^{-x}+cosx}dx$ ……………………………………………………………1p

$=x+\ln(e^{-x}+cosx)+c,\ c\in\mathbb{R}.$ ………………………………………………1p

Problema 2.

Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{e^{2x}}{e+e^{2x}}$. Se cere:

a) Demonstrați că $f(x)+f(1-x)=1,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0$.

c) Calculați $I=\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx.$

Soluție:

a) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1-2x}}$. Verifică egalitatea: $f(x)+f(1-x)=1,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$. ………………..………….2p

b) $F(x)=\int f(x)dx=\frac{1}{2}\ln\left(e+e^{2x}\right)+c$ ……………………………………………………………2p

$F(0)=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}\ln(1+e)$ ……………………………………………………………..……….1p

c) În $I=\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx$ schimbăm variabila $x=1-t \Rightarrow I=\int_0^1 f(1-t)\sin(\pi t)dt$ ……….1p

$2I=\int_0^1 \sin(\pi x)dx=\frac{2}{\pi} \Rightarrow I=\frac{1}{\pi}$ ………………………..……………………………………………1p

Problema 3.

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție "∘" prin
$x \circ y = 4(x+1)(y+1)-1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că legea de compoziție este asociativă și determinați elementul neutru.

b) Calculați $-\frac{2017}{1008} \circ \left(-\frac{2016}{1008}\right) \circ \dots \circ \left(-\frac{1}{1008}\right)$.

c) Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea "∘ ".

Soluție:

a) Justifică asociativitatea ……………………………..……………………..……….....……………1p

Elementul neutru $e=-\frac{3}{4}$ ……………………………….……………………..…....…….….…………1p

b) $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}$ ……………………………………..…..…….……..……..1p

În compunere există $-\frac{1008}{1008}=-1$. (-1 este elementul ”absorbant” sau ”distrugător”)

Deci compunerea celor 2017 elemente este -1. ………………………..………..……..……..……1p

c) $x'=-\frac{16x+15}{16(x+1)}$, $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ ………………………………..……..………….……….2p

$x'=x \Rightarrow x_1=-\frac{5}{4}, \ x_2=-\frac{3}{4}$. ……………………………………………………..……..……..1p

Problema 4.

Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție "∗" prin $x*y=\sqrt[3]{xy}, \ (\forall)x,y\in \mathbf{R}$.

a) Demonstrați că legea "∗" nu este asociativă.

b) Fie $H=\{-1,0,1\}$. Demonstrați că H este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu legea "∗" și că operația indusă de "∗" pe H este asociativă.

Soluție:

a) Este suficient un contraexemplu.

$$\left.\begin{aligned}(1*2)*3&=\sqrt[3]{2}*3=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27}}=\sqrt[9]{54}\\ 1*(2*3)&=1*\sqrt[3]{6}=\sqrt[9]{6}\end{aligned}\right\}$$ ……………………………………………………..1p

Rezultă că $(1*2)*3 \neq 1*(2*3)$, deci operația "∗"nu este asociativă. …………………..………...1p

b) Tabla legii de compoziție "∗" relative la mulțimea H este:

∗	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

………………………………………………………………….…1p

Deducem că $x*y\in H, \ (\forall)x,y\in H$, deci H este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu operația "∗" ……1p

Fie "∘" legea de compoziție indusă de legea "∗"pe H.

Pentru orice $x\in H$ avem $\sqrt[3]{x}=x$ ……………………………………………………………..1p

Avem:

$$\begin{cases} a\circ(b\circ c)=a\circ\sqrt[3]{bc}=a\circ(bc)=\sqrt[3]{abc}=abc \\ (a\circ b)\circ c=\sqrt[3]{ab}\circ c=(ab)\circ c=\sqrt[3]{abc}=abc \end{cases},\ (\forall)a,b,c\in H$$

Așadar legea de compoziție $"\circ"$ este asociativă ……………………………………………………………2p