MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

Clasa a IX –a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+mx+2017$, unde $m\in\mathbf{R}$

a) Determinaţi valoarea lui m ştiind că $f(-1),\ f(1)$ şi $f(2)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Dacă $f(1)=f(4)$, să se demonstreze că $f(2)=f(3)$.

c) Dacă m este un număr întreg impar, să se demonstreze că ecuaţia $f(x)=0$ nu are rădăcini întregi.

Soluție:

a) Obține $f(-1)=2018-m,\ f(1)=2018+m,\ f(2)=2021+2m$ ……………………………..…..1 punct

Finalizare: $2(2018+m)=2021+2m+2018-m \Leftrightarrow m=3$ ……………………..………………..…1 punct

b) Din condiția $f(1)=f(4)$ obține m= -5…………………………………………………………1 punct

Verifica $f(2)=f(3)=2011$ ………………………………………………………….…………..…..1 punct

c) Presupunem ca ecuația ar avea o rădăcina întreagă r. Atunci $r^2+r\cdot m+2017=0$

Dacă r = număr par , atunci par+par+impar=0 – imposibil………………………………….….…..…..1 punct

Dacă r = număr impar , atunci impar+impar+impar=0 –imposibil ……………………………..….…..1 punct

Finalizare: Presupunerea făcută este falsă, deci ecuația nu are rădăcini întregi………………….. 1 punct

Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC, punctele M, N și P astfel încât: $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ și Q mijlocul segmentului $[PM]$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$.

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare.

c) Calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Soluție:

a) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA}$ ………………………2 puncte

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}\right)=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\cdot\overrightarrow{BA}$ ……………………………..……………………………..……2 puncte

b) $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{8}\cdot\overrightarrow{BN}$ rezultă *B, Q, N* puncte coliniare………………………………………………….…… 2 puncte

c) $\frac{BQ}{BN}=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{BQ}{QN}=\frac{3}{5}$ ……………………………………………………………………. 1 punct

Problema 3.

a) Pentru $q\in\mathbb{R}$ se consideră numerele $a=q^2-q+1$ şi $b=q^2+q+1$. Să se demonstreze că $a\cdot b\geq 1$, oricare ar fi $q\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi primul termen şi raţia unei progresii geometrice crescătoare $(b_n)_{n\geq 1}$, având termeni pozitivi, ştiind că $b_1+b_2+b_3=7$ şi $b_1^2+b_2^2+b_3^2=21$ (utilizând, eventual, identitatea obţinută la punctul anterior).

Soluție:

a) Obține $a\cdot b=q^4+q^2+1$ ……………………………………………………….……….… 2 puncte

Finalizare : Deoarece $q^4\geq 0$, $q^2\geq 0$ deducem ca $a\cdot b\geq 1$ ……………………………...……… 1 punct

b) Obține relațiile $b_1\left(q^2+q+1\right)=7$ si $b_1^2\left(q^4+q^2+1\right)=21$ ………………………………….. 1 punct

Folosind $q^4+q^2+1=\left(q^2+q+1\right)\left(q^2-q+1\right)$, obține $b_1\left(q^2-q+1\right)=3$ ………………….…….1 punct

Rezolvă ecuația $2q^2-5q+2=0$, obținând soluțiile $q_1=2$ și $q_2=\frac{1}{2}$ ……………….….....1 punct

Numai $q_1=2$ convine și în acest caz $b_1=1$ ……………………………………………………1 punct

Problema 4.

Patru persoane A, B, C, D au primit împreună pentru efectuarea unei lucrări suma de 2017 lei. Ştiind că A a primit cel mai mult, fiecare a primit mai mult de 100 de lei şi A împreună cu D au primit cu 537 de lei mai puțin decât B împreună cu C, să se determine ce sumă a primit A? (sumele primite sunt numere naturale)

Soluție:

Dacă a, b, c, d sunt sumele primite de către A, B, C respectiv D , atunci a+b+c+d=2017,
a>b, a>c, a>d și a+d=b+c-537 …………………………………………………….....……..2 puncte
Obține a+d=740 și b+c=1277………………………………….........................……2 puncte
Deoarece a >b, a>c, a>d deduce $a>638,5$ ……………………………........................………1 punct
Daca a=639, atunci d=101……………………………………..…………………….……..1 punct
Daca a=640, atunci d=100, nu convine …………………………….…………………..……1 punct