



CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Tehnologică : profilul Tehnic

XI. OSZTÁLY

1. Feladat

Számítsd ki:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{3x}; \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - (1+x)^2}{x}.$$

2. Feladat

Egy kutatócsoport megállapította, hogy egy bizonyos anyag hőmérséklete a következő szabály szerint változik: $T(t) = \sqrt{t^2 + at + b} - ct + 5$, ahol $a, b, c \in \mathbf{R}$ konstansok, amelyek értékét meg kell határozni, $T(t)$ pedig az anyag fokokban mért hőmérséklete a $t \geq 0$ pillanatban, ahol t a kísérlet kezdete óta eltelt másodpercek számát jelenti.

a) Határozd meg $a, b, c \in \mathbf{R}$ értékét, ha $T(1) = 7$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 8$.

b) Az előbb meghatározott a, b, c értékek esetén állapítsd meg, hogy lehet-e a kísérlet valamely pillanatában az illető anyag hőmérséklete 0° .

3. Feladat

Adott az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A \in M_3(\mathbf{R})$ mátrix.

a) Igazold, hogy $A^2 = 6A$.

b) Határozd meg az $a \in \mathbf{R}$ azon értékét, amelyre az $Y = aA - I_3$ mátrix az $X = A - I_3$ inverz mátrixa!

c) Igazold, hogy $I_3 + A + A^2 + A^3 \dots + A^{2017} = \frac{6^{2018} - 5 \cdot 6^{2017} - 1}{5} \cdot A + I_3$.

4. Feladat

Adott az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ mátrix.

Igazold, hogy:

a) $\det(A - xI_2) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$;

b) $\det(A + I_2) + \det(A - I_2) \in \mathbf{N}$;

c) Az $X \cdot A - A \cdot X = A$ egyenletnek nincs megoldása $M_2(\mathbf{R})$ -ben!

Megjegyzés: Munkaidő 4 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.